

کد کنترل

223

A



دوشنبه

۱۴۰۲/۱۲/۰۷



دوره جمع بندی دوینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
دفترچه پاسخ ریاضی
(مباحث پایه)

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	محدثه شیخ علی	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	سجاد احمدی - فرشاد حسن زاده

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

اهمیت مباحث ریاضیات پایه در کنکور:

این آزمون با ۱۰ موضوعاتی کنارتون هستیم از جنس ریاضی، با طعم فیزیک و بوی شیمی!!
تعجب نکنید، فصول این آزمون مبنا و پایه ریاضیاته که هر چند به صورت مستقیم خیلی سوال خیز نیست اما در واقع پیش نیاز همه بخش‌های ریاضی و لازمه حل سوالات و مسائل فیزیک و شیمی.
این بخش‌ها همون کلید گم شده دانش آموزای ما برای موفقیت در حل سوالات ترکیبی ریاضی، فیزیک و شیمی که با تسلط رو اینا می‌تونین خیالتون بابت حل مسائل معادله، نامعادله و ... کاملاً راحت باشه.

پیش نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای یادگیری بهتر این بخش بهتره فصل‌های ۲ و ۴ و ۵ و ۷ از کتاب نهم رو دوره کنید.

این بخش‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

سوالات تابع، لگاریتم و نمایی، مشتق و کاربردش و ... حتی احتمال، همه و همه می‌تونن با این بخش‌ها ترکیب بشن. دیگه نمی‌دونیم با چه زبونی بهتون اهمیت تحلیل و بررسی این بخش آزمون رو نشون بدیم.
البته بخش الگو و دنباله یک بخش ایزوله هست، یعنی با هیچ بخش دیگه‌ای مرتبط نیست.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده است؟

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲
۴	۵	۵	۶	۸	۶
معادلات گویا نامعادلات معادلات رادیکالی الگو	ریشه و توان‌های گویا نامعادلات معادله و تابع درجه دوم سهمی الگو و دنباله	عبارات جبری ترکیب تابع و معادلات رادیکالی معادله و تابع درجه دوم معادله درجه دوم معادله درجه دوم	ریشه و توان‌های گویا نامعادلات معادلات رادیکالی و گویا روابط بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم سهمی الگوی خطی	ریشه و توان‌های گویا نامعادلات معادلات رادیکالی روابط بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم سهمی و محور تقارن مجموعه‌ها مجموعه‌ها الگو و دنباله	تعیین علامت معادلات گویا و معادلات رادیکالی معادله و تابع درجه دوم معادله و تابع درجه دوم مجموعه‌ها دنباله حسابی

پیش بینی شما برای کنکور سال بعد چیه؟

تو کنکور چند سال گذشته سوالات مستقیم این فصول روند رو به رشدی داشته که این موضوع در سال ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ کاملاً به چشم می‌خورد و پیش‌بینی میشه در سال‌های بعد هم این روند ادامه داشته باشه.

کلام آخر اینکه با توجه به اهمیت این بخش و ارتباط اون با همه موضوعات دیگه، تحلیل و یادگیری نکات این آزمون از نون شب هم واجب‌تره.

۱- اگر برای دو مجموعه A و B شرط $A - B = A$ برقرار باشد، کدام یک نادرست است؟

$A \cup B = B$ (۴)

$B \subset A'$ (۳)

$B \cup A' = A'$ (۲)

$B - A = B$ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

قانون دمورگان چی میگه؟

اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه داریم:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$

پاسخ تشریحی:

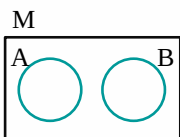
وقتی $A - B = A$ یعنی A و B جدا از هم هستند، پس:

بررسی سایر موارد:

گزینه ۱ صحیح است، زیرا: $B - A = B$

گزینه ۲ صحیح است، زیرا:

گزینه ۳ صحیح است، زیرا:



$A - B = A \Rightarrow A \cap B' = A \xrightarrow{\text{دمورگان}} B \cup A' = A'$

$A - B = A \Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow A \subset B' \Rightarrow B \subset A'$

گروه آموزشی ماز

۲- در یک کلاس ۱۰۰ نفری، فقط ۲ رشته ورزشی والیبال و فوتبال امکان برگزاری وجود دارد. تعداد کسانی که هر ۲ رشته را انتخاب کرده‌اند، دو برابر تعداد کسانی است که هیچ رشته‌ای را انتخاب نکرده‌اند. تعداد کسانی که فقط والیبال را انتخاب کرده‌اند، ۲۴ نفر و تعداد کسانی که فوتبال را انتخاب کرده‌اند، ۵۲ نفر است. چه تعداد هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۲۴ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

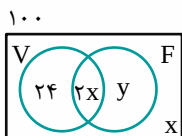
و اینک فرمول تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه تقدیم نثاران!

اگر A و B دو مجموعه باشند، خواهیم داشت: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

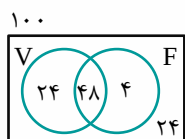
پاسخ تشریحی:

به کمک نمودار ون، داریم:

$$\begin{cases} 2x + y = 52 \\ 3x + y + 24 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 52 \\ 3x + y = 76 \end{cases}$$



$x = 24 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$



بنابراین ۲۴ نفر هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند.

گروه آموزشی ماز

۳- مجموعه $A = \left\{ n^3 + m^2 : m, n \in \mathbb{N}, 4^{-\frac{3m}{2}} \times 8^{-n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3m}{2}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n > \frac{1}{512} \right\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ تشریحی:

اولاً $m, n \in \mathbb{N}$ ، کافی است نامعادله را حل کنیم و داریم:

$$(2^2)^{-\frac{3m}{2}} \times 2^{-3n} + 2^{-3m} \times 2^{-3n} > 2^{-9}$$

$$\Rightarrow 2 \times 2^{-3n-3m} > 2^{-9} \Rightarrow 2^{-3m-3n} > 2^{-10} \Rightarrow -3m-3n > -10$$

$$\Rightarrow 3m+3n < 10 \Rightarrow m+n < \frac{10}{3} \xrightarrow{m,n \in \mathbb{N}}$$

m	۱	۲	۱
n	۱	۱	۲

 $n^3 + m^2 = 2, 5, 9$

ثانیاً حالات ممکن برابر است با:

پس ۳ عضوی است.

گروه آموزشی ماز

۴- در یک دنباله هندسی با جمله اول a ، رابطه $\frac{2a_3}{a^3} + \frac{a_4}{a \cdot a_3} = 6$ ، رابطه $\frac{2a_3}{a^3} + \frac{a_4}{a \cdot a_3} = 6$ حاصل کدام می تواند باشد؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

جمله عمومی دنباله هندسی چی بود؟

اگر در یک دنباله هندسی، a جمله اول و q قدرنسبت باشد، آن گاه جمله عمومی به صورت $a_n = aq^{n-1}$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

فرض کنید $a_n = aq^{n-1}$ جمله عمومی دنباله باشد.

$$\frac{2aq^2}{a^3} + \frac{aq^3}{a \cdot aq^2} = 6 \Rightarrow \frac{2q^2}{a^2} + \frac{q}{a} = 6$$

$$\frac{a_2}{a^2} = \frac{aq}{a^2} = \frac{q}{a} = t \Rightarrow 2t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ یا } -2$$

گروه آموزشی ماز

۵- هشتمین جمله الگوی درجه دوم $1, a, 3, b, 13, \dots$ با چندمین جمله دنباله حسابی $a+2, b, \dots$ برابر است؟

(۱) دهم (۲) یازدهم (۳) دوازدهم (۴) سیزدهم

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

بریم سراغ جمله عمومی دنباله حسابی...

اگر در یک دنباله حسابی، a جمله اول و d قدرنسبت باشد، آن گاه جمله عمومی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ خواهد بود.

خب حالا بگید ببینیم جمله عمومی دنباله درجه دوم چی میشه؟

جمله عمومی دنباله درجه دوم به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ ($a \neq 0$) خواهد بود.

فرض کنید جمله عمومی الگوی درجه دوم به صورت $a_n = An^2 + Bn + C$ باشد.

$$\begin{cases} a_1 = A + B + C = 1 \\ a_7 = 9A + 7B + C = 3 \\ a_{13} = 16A + 13B + C = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8A + 6B = 2 \\ 16A + 12B = 10 \end{cases}$$

پس $A = 1$ و $B = -3$ و $C = 3$ است و در نتیجه: $a_n = n^2 - 3n + 3$ و $a_8 = 43$.

$$\begin{cases} a = a_7 = 1 \\ b = a_8 = 7 \end{cases}$$

$$4n - 1 = 43 \Rightarrow n = 11$$

دنباله حسابی به صورت $3, 7, \dots$ است که جمله عمومی آن $4n - 1$ است.

گروه آموزشی ماز

۶- دنباله‌های حسابی $a_n: 1, 4, 7, \dots$ و $b_n: 2, 6, 10, \dots$ مفروض‌اند. اگر جمله عمومی دنباله جملات مشترک این دو دنباله باشد، واسطه هندسی بین c_1 و c_{11} کدام است؟

$$10\sqrt{55} \quad (4)$$

$$10\sqrt{65} \quad (3)$$

$$10\sqrt{91} \quad (2)$$

$$10\sqrt{77} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

اولین جمله مشترک، عدد ۱۰ است. قدرنسبت دو دنباله، ۳ و ۴ است. پس قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر ۱۲ است. در نتیجه: $c_n = 12n - 2$.

$$\Rightarrow \sqrt{c_6 c_{11}} = \sqrt{70 \times 130} = 10\sqrt{91}$$

گروه آموزشی ماز

۷- اعداد زوج و طبیعی را به صورت $\{2\}, \{4, 6\}, \{8, 10, 12\}, \dots$ دسته‌بندی کرده‌ایم. حاصل ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو دسته هشتم چه عددی است؟

$$4032 \quad (4)$$

$$4176 \quad (3)$$

$$4320 \quad (2)$$

$$4060 \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{دسته اول} = 2 \times 1$$

$$\text{دسته دوم} = 2 \times 2, 2 \times 3$$

$$\text{دسته سوم} = 2 \times 4, 2 \times 5, 2 \times 6$$

پس دقت کنید $1, 3, 6, \dots$ اعداد مثلثی هستند.

$$\text{دسته هر} = 2 \times \frac{n^2 + n}{2} = n^2 + n$$

$$\text{دسته هر} = 2 \times \frac{n^2 - n}{2} + 2 = n^2 - n + 2$$

$$\text{بزرگ‌ترین عدد دسته هشتم} = 8^2 + 8 = 72$$

$$\Rightarrow 72 \times 58 = 4176$$

$$\text{کوچک‌ترین عدد دسته هشتم} = 64 - 8 + 2 = 58$$

گروه آموزشی ماز

۸- ریشه پنجم عدد مثبت a ، از حاصل ضرب ریشه‌های مرتبه دهم آن، ۶ واحد بیشتر است. ریشه پنجم عدد $5 + \left(\frac{9}{a}\right)^{-1}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

اگر n فرد باشد، ریشه n ام عدد a برابر $a^{\frac{1}{n}}$ است و اگر n زوج باشد، ریشه‌های n ام عدد a برابر $\pm a^{\frac{1}{n}}$ است.

$$a^{\frac{1}{5}} = (-a^{\frac{1}{10}})(a^{\frac{1}{10}}) + 6 \Rightarrow a^{\frac{1}{5}} = -a^{\frac{1}{5}} + 6 \Rightarrow a^{\frac{1}{5}} = 3$$

$$\Rightarrow a = 3^5 \Rightarrow \frac{a}{9} = 27 \Rightarrow \frac{a}{9} + 5 = 32$$

ریشه پنجم ۳۲ برابر ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $A = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} \times (24)^{-\frac{2}{3}}$ مقدار $\frac{1}{4A}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{9}$ (۴)

$\sqrt[3]{3}$ (۳)

$\sqrt[3]{3}$ (۲)

$\sqrt[3]{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

$$A = \sqrt[3]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^3} \times (2^3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow A = 3^{\frac{5}{6}} \times 2^{-2} = 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4A} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $a^6 = 2a^2 + 1$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{1}{\sqrt{a^4+1}-a} - \frac{1}{\sqrt{a^4+1}+a}$ چند برابر a است؟

$\sqrt[3]{2}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

اتحاد فیل و فنجهون (چاق و لاغر)!

$$a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

پاسخ تشریحی:

مخرج مشترک می گیریم:

$$A = \frac{\sqrt{a^4+1}+a-\sqrt{a^4+1}+a}{(a^4+1)-a^2} = \frac{2a}{a^4-a^2+1} = \frac{2a(a^2+1)}{(a^2+1)(a^4-a^2+1)}$$

$$= \frac{2a(a^2+1)}{a^6+1} = \frac{2a(a^2+1)}{2a^2+2} = a$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- هرگاه $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$ و $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$ حاصل $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

$8\sqrt{2}$ (۴)

$7\sqrt{2}$ (۳)

$6\sqrt{2}$ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۱)

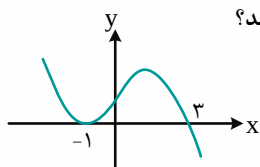
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

یه نگاهی هم به اتحاد مزدوج بندازیم:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 \\
 &= \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 = 3\sqrt{2} - 1 + 3\sqrt{2} + 1 + \alpha^2\beta^2 \\
 \Rightarrow \alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2 = (\sqrt[3]{(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1)})^2 = \sqrt{2} \\
 \Rightarrow \text{عبارت} &= 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز



۱۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر عبارت $(ax+b)f(x)$ همواره نامنفی باشد، زوج مرتب (a,b) کدام می تواند باشد؟

- (۱) $(2, -6)$
- (۲) $(-2, 6)$
- (۳) $(-9, 3)$
- (۴) $(9, -3)$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

	-1	3
$f(x)$	+	-
$ax+b$	+	-
$(ax+b)f(x)$	+	+

جدول تعیین علامت باید به صورت مقابل باشد:

پس باید $a < 0$ و $3a + b = 0$ باشد، یعنی $a < 0$ و $b = -3a$ است، پس گزینه ۲ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- در مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x-13}{x-4} > 3$ ، چند عدد صحیح مثبت وجود دارد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۵
- (۳) ۳
- (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

عدد ۳ را به سمت چپ نامعادله انتقال می دهیم و سپس عبارت را تعیین علامت می کنیم:

$$\frac{3x-13}{x-4} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-4} > 0 \Rightarrow x-4 < 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x = 1, 2, 3$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x^2+2x+5} < k$ به صورت $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ است. حاصل $k\alpha$ کدام است؟

- (۱) $0/25$
- (۲) $0/5$
- (۳) ۱
- (۴) $1/5$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

نکته‌ای گوییم گوارا و پر مغز!

اگر در نامعادله درجه ۲، به صورت $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$ ، مجموعه جواب به صورت $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ باشد، آن گاه قطعاً دلتای آن صفر است.

حاصل $x^2 + 2x + 5$ همواره مثبت است، پس مجاز به طرفین وسطین هستیم.

$$k(x^2 + 2x + 5) > x + 1 \Rightarrow kx^2 + (2k-1)x + 5k-1 > 0$$

برای آن که جواب به صورت $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ باشد، باید α ریشه مضاعف عبارت درجه دوم و $k > 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4k^2 - 4k + 1 - 20k^2 + 4k = 0$$

$$\Rightarrow 16k^2 = 1 \xrightarrow{k>0} k = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow k\alpha = \frac{1}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - (3m+5)x + 2m = 0$ با دو برابر حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر است. محور تقارن این سهمی کدام است؟

$x = 5$ (۴) $x = 3$ (۳) $x = 6$ (۲) $x = 9$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

چند فرمول در مورد معادله درجه دوم و دیگر هیچ!

در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر α و β ریشه‌های آن باشند، خواهیم داشت:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad x_S = -\frac{b}{2a} \text{ : محور تقارن سهمی}$$

پاسخ تشریحی:

مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\frac{3m+5}{2} = 2 \times \frac{2m}{2} \Rightarrow 3m+5 = 4m \Rightarrow m = 5$$

$$2x^2 - 20x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-20}{4} = 5 \quad \text{محور تقارن، خط } x = -\frac{b}{2a} \text{ است.}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- معادله‌های $x^2 - 2x - m = 0$ و $x^2 - 4x + m = 0$ ریشه مشترک غیر صفر دارند. جمع مربع ریشه‌های غیر مشترک آن‌ها چه عددی است؟

5 (۴) 4 (۳) 2 (۲) 13 (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم x ریشه مشترک آن‌ها باشد، پس در هر دو معادله صدق می‌کند، یعنی:

$$x^2 - 2x - m = 0 \Rightarrow x^2 = 2x + m$$

$$x^2 - 4x + m = 0 \Rightarrow x^2 = 4x - m$$

$$2x + m = 4x - m \Rightarrow 2m = 2x \Rightarrow x = m$$

پس $x = m$ ریشه مشترک آنهاست، حال اگر $x = m$ را در یکی از معادله‌ها جایگذاری کنیم، داریم:

$$x^2 - 2x - m = 0 \xrightarrow{x=m} m^2 - 2m - m = 0 \Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

توجه کنید که ریشه مشترک هر دو معادله ($x = m$)، مخالف صفر است، پس $m = 3$ قابل قبول است. پس $m = 3$ بوده که در این صورت:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

پس ریشه‌های غیر مشترک $x = 1$ و $x = -1$ هستند و جمع مربع آن‌ها برابر ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۱۷- ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + b = 0$ نیم‌واحد از قرینه ریشه‌های $2ax^2 + ax + 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $a - 2b$ چه عددی است؟

2 (۴) -1 (۳) -2 (۲) 1 (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

$$2ax^2 + ax + 6 = 0 \Rightarrow \alpha, \beta \text{ ریشه‌ها}$$

$$2x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow -\beta + \frac{1}{2}, -\alpha + \frac{1}{2} \text{ ریشه‌ها}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ -(\alpha + \beta) + 1 = -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -3$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a} = -1$$

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \beta\right) = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \alpha\beta = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{a} = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -1$$

$$a - 2b = -1$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - x - 1 = 0$ باشند. معادله درجه دوم با ریشه‌های $\alpha\beta$ و $\alpha + \beta$ کدام است؟

$$24x^2 + 34x - 7 = 0 \quad (2)$$

$$12x^2 + 34x - 7 = 0 \quad (1)$$

$$12x^2 - 34x + 7 = 0 \quad (4)$$

$$24x^2 - 34x + 7 = 0 \quad (3)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها:

اگر مجموع ریشه‌ها یک معادله درجه دوم S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد، آن‌گاه معادله درجه دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

$$2\alpha - 1 + 2\beta - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{6}$$

$$(2\alpha - 1)(2\beta - 1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = -\frac{1}{3}$$

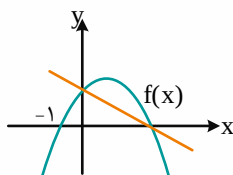
$$4\alpha\beta - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{6} & S = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} & P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow 24x^2 - 34x + 7 = 0$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار سهمی $y = f(x)$ و خط $g(x) = 4 - 2x$ در شکل زیر رسم شده است. بیشترین مقدار $y = f(x)$ چه عددی است؟



$$\frac{9}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{7}{2} \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$

پاسخ تشریحی

max یا min برای یک سهمی، مسأله این است!

اگر در سهمی $ax^2 + bx + c$:

(الف) $a > 0$ باشد، سهمی دارای min است. مقدار min در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی: $\min = -\frac{\Delta}{4a}$

(ب) $a < 0$ باشد، سهمی دارای max است. مقدار max در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی: $\max = -\frac{\Delta}{4a}$

پاسخ تشریحی

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(x) = k(x+1)(x-2) \Rightarrow f(0) = 4$$

$$g(0) = 4 \Rightarrow -2k = 4 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow f(x) = -2(x+1)(x-2)$$

$$x_S = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\max f = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اعداد غیرصفر a و b صفرهای تابع $f(x) = x^2 - (a^2 + b^2 + 4ab)x - (a+b)$ هستند. حداقل مقدار تابع $f(x)$ چه عددی است؟

$$-\frac{21}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{9}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{25}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{17}{4} \quad (1)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

چون a و b ریشه‌های $f(x) = 0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} S = a + b = a^2 + b^2 + 4ab \Rightarrow S = S^2 - 2P + 4P \\ P = ab = -(a+b) \Rightarrow S = -P \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = S^2 + 2P \Rightarrow S^2 - 3S = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = -3 \end{cases} \\ S = -P \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - Sx + P = x^2 - 3x - 3$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \quad \min f = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 3 = -\frac{21}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + ax + b = 0$ باشند، به طوری که $2\alpha^2 + 3\beta^2 + \beta = 32$ ، اختلاف دو ریشه کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی

ابتدا عبارت را به صورت $2(\alpha^2 + \beta^2) + (\beta^2 + \beta) = 32$ می‌نویسیم. با توجه به آن که α و β ریشه‌های معادله داده شده هستند، پس:

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{a}$$

$$a\beta^2 + a\beta + b = 0 \Rightarrow \beta^2 + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$2(S^2 - 2P) + (\beta^2 + \beta) = 32 \Rightarrow 2(1 - 2P) + (-P) = 32$$

پس داریم:

$$\Rightarrow \Delta P = -30 \Rightarrow P = -6 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -6 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha, \beta = 2, -3$ ریشه ۲ = اختلاف ۵

گروه آموزشی ماز

۲۲- در یک مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض برابر k است. حاصل $k^3 - 2k$ برابر کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{5} - 2$ (۳)

$\sqrt{5} - 1$ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



در مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است، که این عدد ریشه معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است، پس:

$$k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 2 \Rightarrow (k+1)(k^2 - k + 1) = 2(k+1)$$

$$\Rightarrow k^3 + 1 = 2k + 2 \Rightarrow k^3 - 2k = 1$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- دو کارگر A و B با هم کاری را در طی ۲۰ روز تمام می‌کنند. کارگر A به تنهایی، ۹ روز زودتر از B کار را تمام می‌کند. کارگر A تنهایی ۹ روز و بعد از آن کارگر B هم تنهایی، ۹ روز کار می‌کنند. چند روز دیگر باید با هم کار کنند که تمام کار انجام شده باشد؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۱۳ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



فرض کنیم کارگر A در A روز و کارگر B در B روز به تنهایی کار را تمام کنند.

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{A+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2A+9}{A(A+9)} = \frac{1}{20}$$

$$A^2 + 9A = 40A + 180 \Rightarrow A^2 - 31A - 180 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 36 \\ A = -5 \end{cases}$$

غ قق

کارگر A به تنهایی در ۳۶ روز و کارگر B به تنهایی در ۴۵ روز کار را تمام می‌کنند. هر کدام، هر روز $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{45}$ کار را انجام می‌دهند، پس:

$$\frac{9}{36} + \frac{9}{45} + \frac{n}{36} + \frac{n}{45} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{n}{20} = 1 \Rightarrow \frac{n}{20} = 1 - \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{n}{20} = \frac{11}{20} \Rightarrow n = 11$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر α جواب معادله $\sqrt{3x+\sqrt{x-3}} - \sqrt{3-x} = x$ باشد، مقدار $\alpha^3 - 3\alpha$ چه عددی است؟

۱۸ (۴)

۹ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



تنها عددی که عبارت در آن تعریف شده است $x = 3$ است، پس $x = 3$ را در معادله قرار می‌دهیم و می‌بینیم که صدق می‌کند، یعنی: $\alpha = 3$.

$$\alpha^3 - 3\alpha = 27 - 9 = 18$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- خط $y = 3x + 1$ ، نمودار تابع $y = \sqrt{mx + 1}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مقدار m کدام است؟

۱/۲۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/ محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

دو تابع را تقاطع می‌دهیم:

$$\sqrt{mx + 1} = 3x + 1$$

$$3 \text{ به توان } 3: mx + 1 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 \Rightarrow 27x^3 + 27x^2 + (9 - m)x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 27x^2 + 27x + 9 - m = 0 \end{cases}$$

معادله آخر باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow 27^2 - 4 \times 27(9 - m) = 0 \Rightarrow 27 - 36 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- نمودار تابع $f(x) = |x - 2| + 3|1 - x|$ فقط در بازه $(0, \alpha)$ زیر خط $y = x + b$ قرار گرفته است. مقدار αb چه عددی است؟

$\frac{20}{3}$ (۴)

$\frac{40}{3}$ (۳)

$\frac{50}{3}$ (۲)

$\frac{10}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/ محاسباتی - ۱۰۰۴)

نکته‌ای بسیار مهم در حل این سوال!

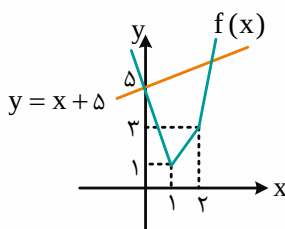
وقتی می‌گویید تابع $f(x)$ در بازه (α, β) زیر تابع $g(x)$ قرار دارد، یعنی α و β ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ هستند.

پاسخ تشریحی:

اولاً دو نمودار در $x = 0$ با یکدیگر تلاقی دارند، پس:

$$f(0) = 5 \Rightarrow y(0) = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$\begin{cases} f(x) = |x - 2| + 3|x - 1| \\ y = x + 5 \end{cases}$$



ثانیاً دو نمودار را با هم تلاقی می‌دهیم و به کمک رسم نمودار داریم:

پس نقطه تلاقی با شرط $x > 2$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 5 \\ y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow 4x - 5 = x + 5 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\alpha b = 5 \times \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

یعنی $\alpha = \frac{10}{3}$ ، پس:

گروه آموزشی ماز

۲۷- در بازه (a, b) ، عبارت $6x^2 - 5x - 6$ منفی و عبارت $|2x - 3| - x$ کمتر از ۲ است. حاصل $b - a$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{6}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ تشریحی:

هر دو عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$1) 6x^2 - 5x - 6 < 0 \Rightarrow (2x - 3)(3x + 2) < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$$

$$2) |2x-3|-x < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3-x < 2 & x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x-x < 2 & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 5 & x \geq \frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{3} & x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 5 \quad (2)$$

$$b-a = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

اشتراک دو بازه بالا به صورت بازه $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ است. پس:

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $|2x-1|+|x+3|=6$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $x < -3 \Rightarrow -2x+1-x-3=6 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$ غقی

۲) $-3 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x+1+x+3=6 \Rightarrow x = -2$

۳) $\frac{1}{2} < x \Rightarrow 2x-1+x+3=6 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{4}{3}-2}{\frac{4}{3}(-2)} = \frac{1}{4}$$

پس ریشه‌ها برابر ۲- و $\frac{4}{3}$ هستند.

گروه آموزشی ماز

۲۹- در مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-2}{|x|} < \frac{|x|}{x+2}$ چند عدد صحیح منفی قرار دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

در حالت $x < 0$ نامعادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{x-2}{-x} < \frac{-x}{x+2} \Rightarrow \frac{2-x}{x} + \frac{x}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{4-x^2+x^2}{x(x+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x(x+2)} < 0 \xrightarrow{x < 0} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

فقط $x = -1$ ، جواب صحیح و منفی نامعادله است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- نمودار تابع $y = x^2 + 2|x+1| - 5x$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

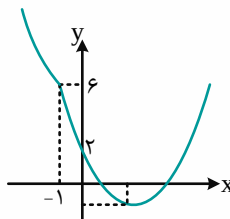
دوم (۲)

اول (۱)

برای قدرمطلق، دو حالت در نظر می گیریم:

$$x < -1 \Rightarrow y = x^2 - 2(x+1) - 5x \Rightarrow y = x^2 - 7x - 2$$

$$x \geq -1 \Rightarrow y = x^2 + 2(x+1) - 5x \Rightarrow y = x^2 - 3x + 2$$

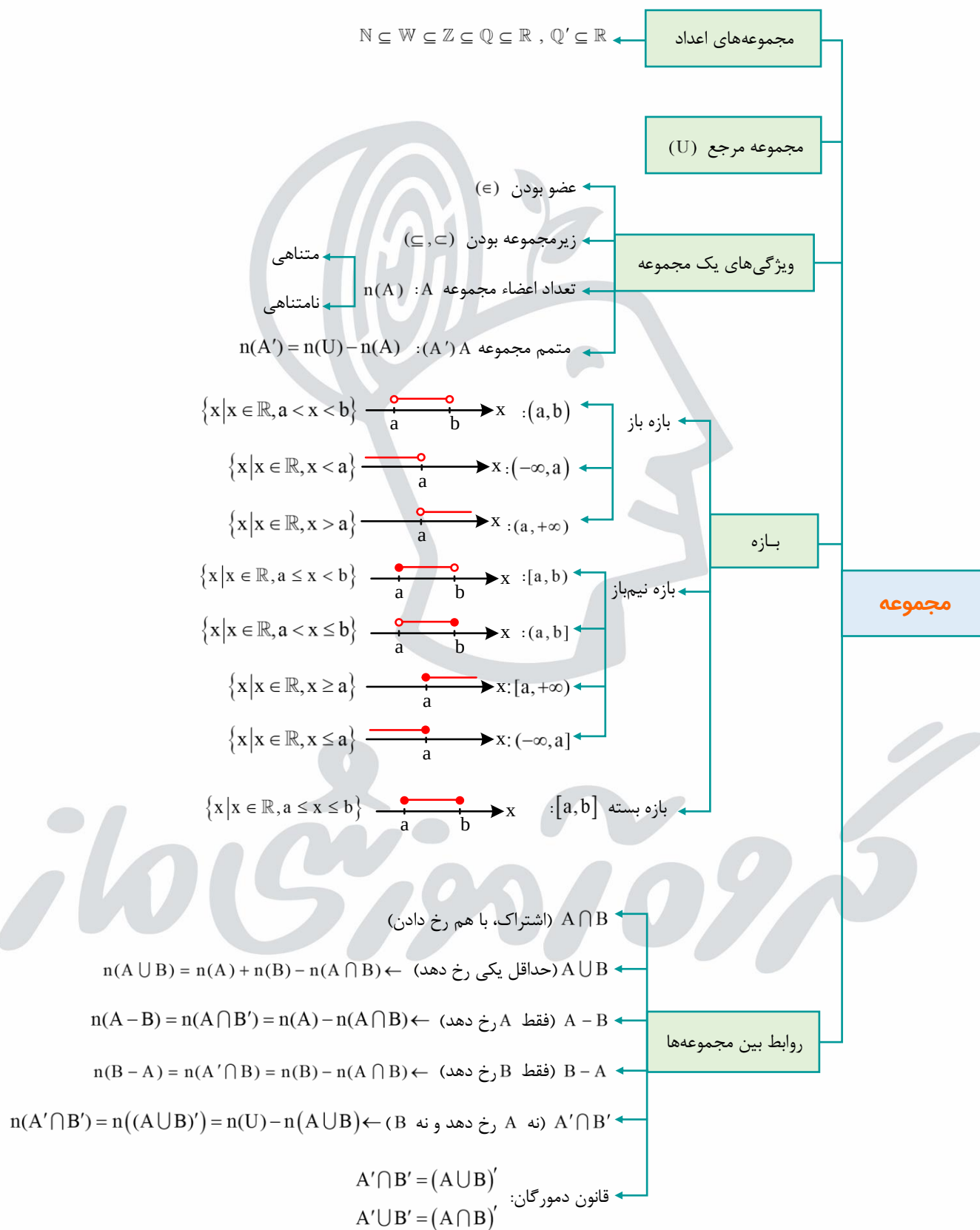


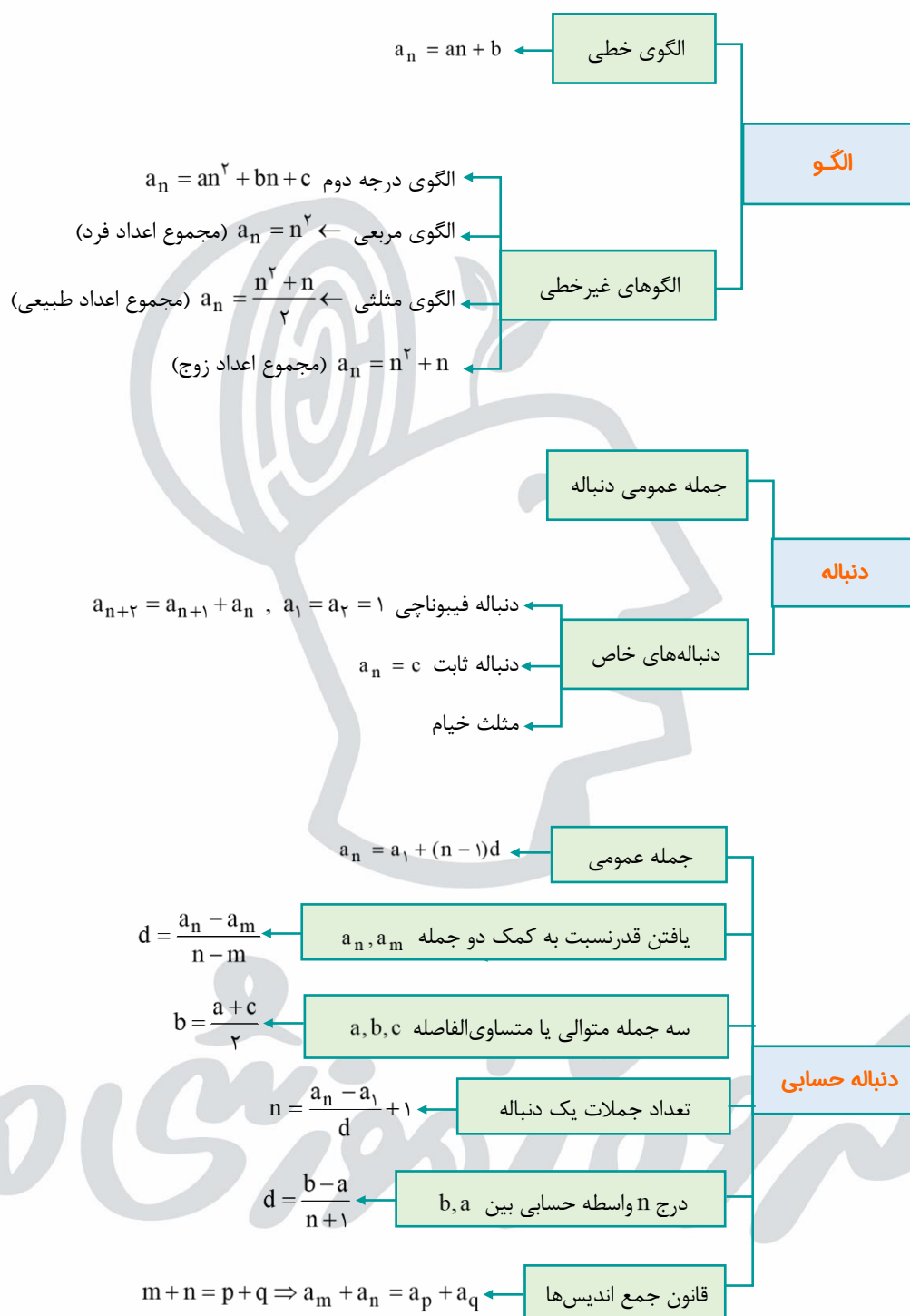
نمودار تابع، از ناحیه سوم عبور نمی کند.

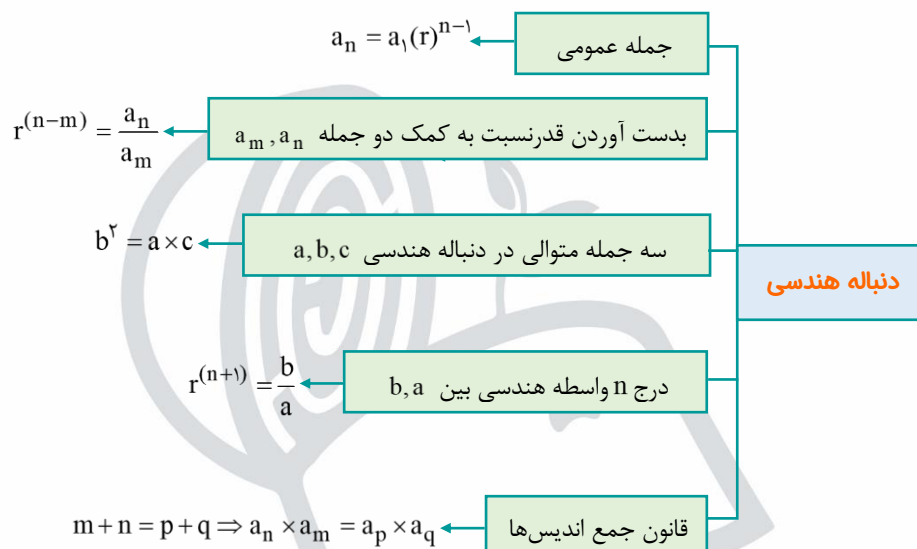
گروه آموزشی ماز

جمع بندی سریع

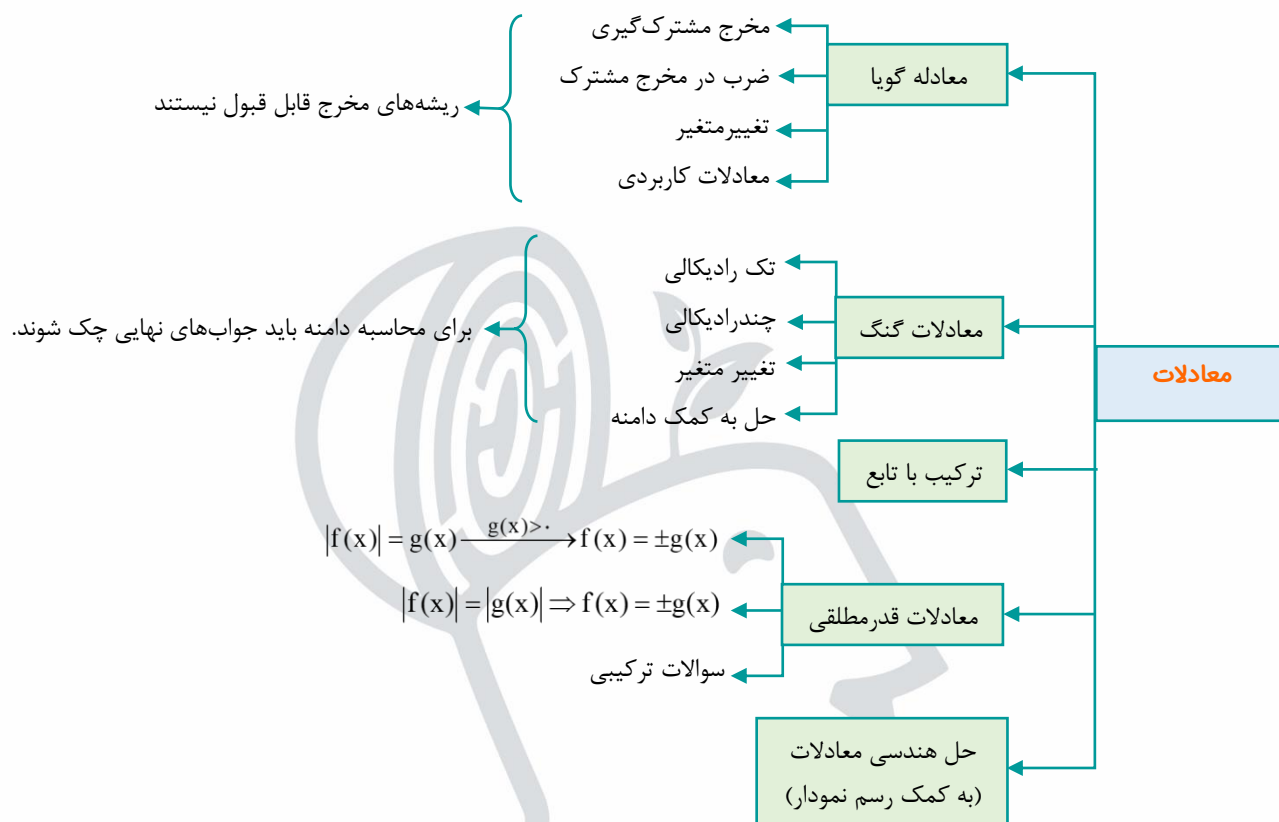
فب فسته نباشیدا هالا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا به نقشه ذهنی خوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!

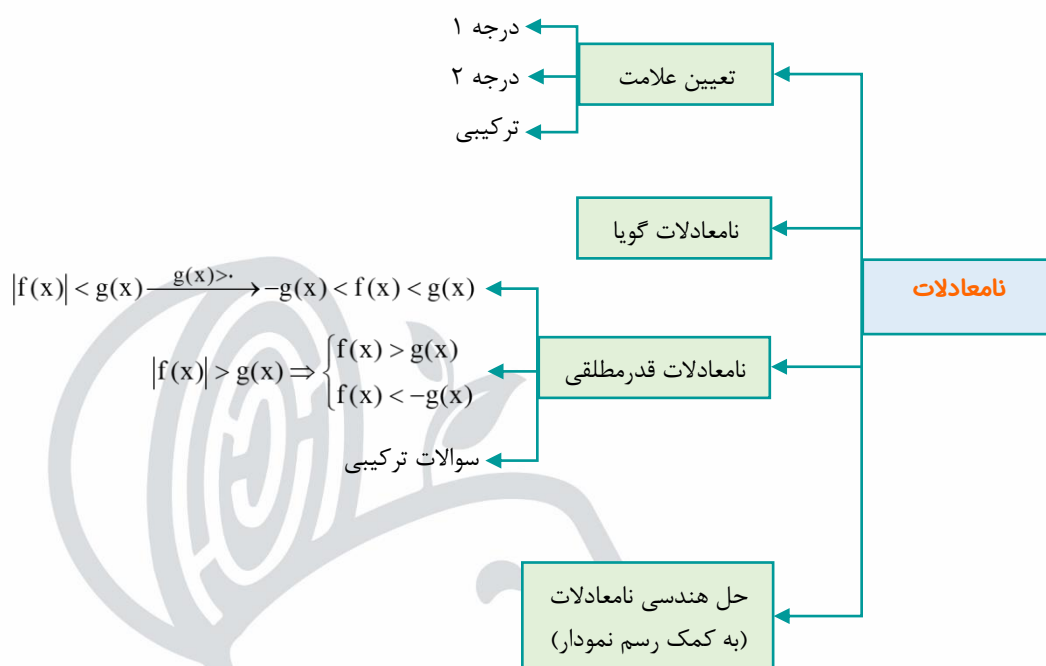




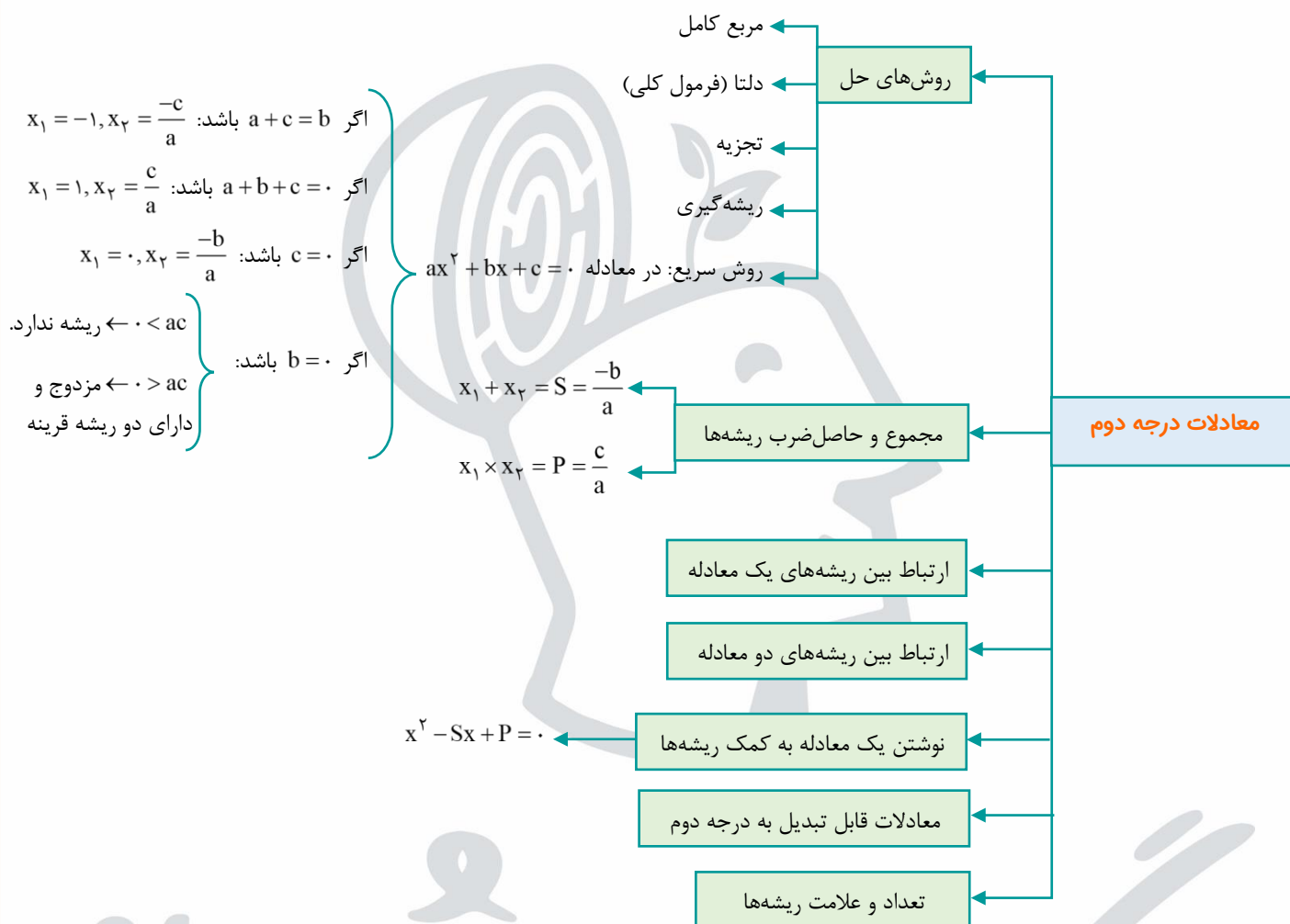


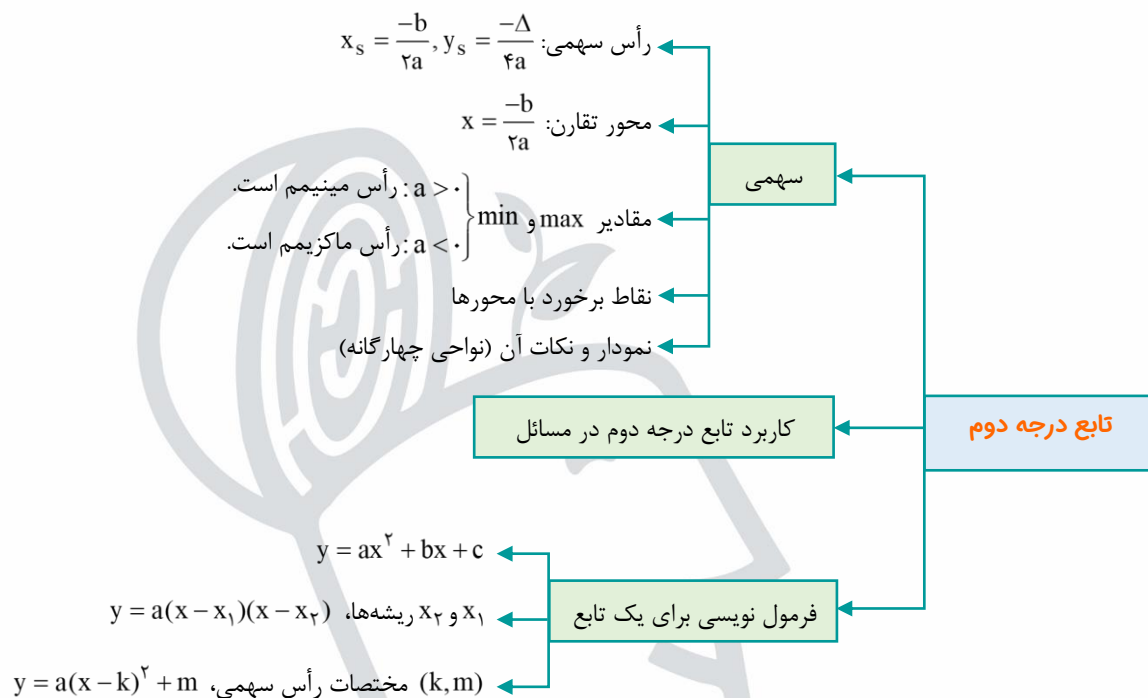
گروه آموزشی ماز





گروه آموزشی ماز





گروه آموزشی ماز

